



ce
pre
UNI

Trigonometría

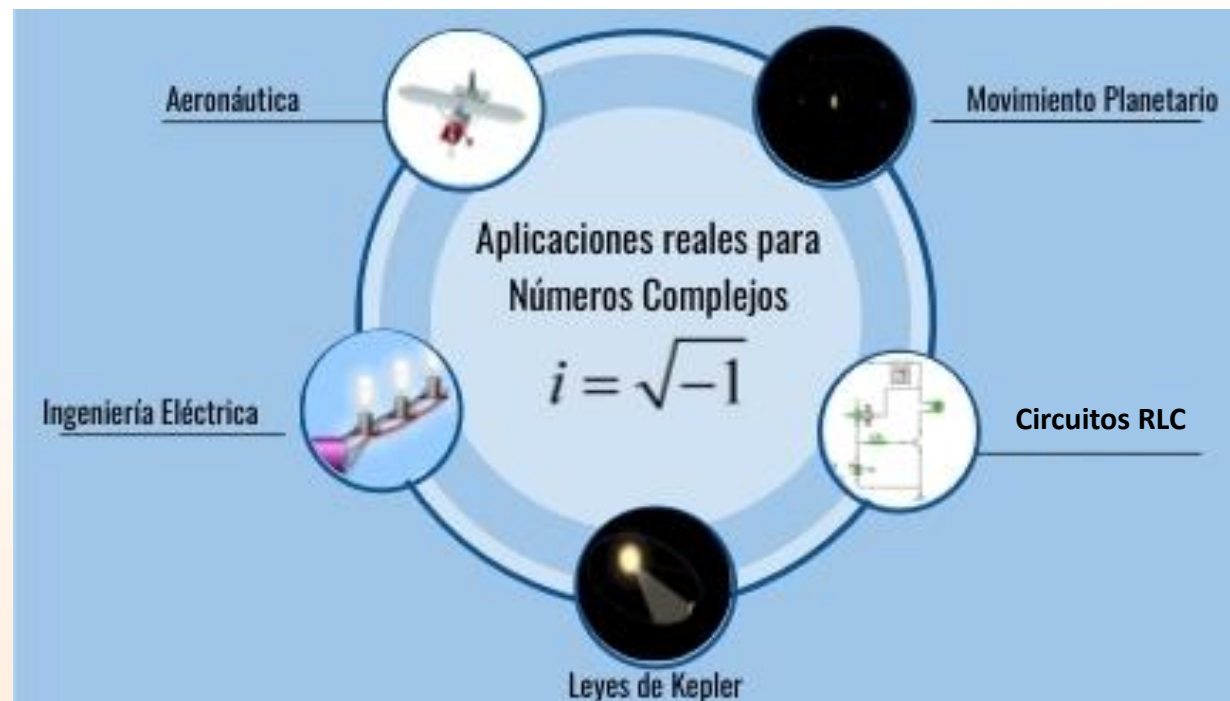
✓ **NÚMEROS COMPLEJOS**

**CICLO
PRE
2024-I**



INTRODUCCIÓN

Los **números complejos** se utilizan en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física y en ingeniería, especialmente en la Electrónica y las Telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.



Se considera a los números: 0, 1, i , e y π como los cinco números más importantes en Matemáticas, las cuales guardan la siguiente relación:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

DEFINICIÓN:

Todo número de la forma $x + iy$; donde x, y son números reales, $i = \sqrt{-1}$, se denomina número complejo ($\mathbb{C}$) y se le denota generalmente por z .

$$z = x + iy \in \mathbb{C}; \forall x, y \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$$

El número real x se denomina parte real del complejo z y se denota por:

$$\text{Re}(z) = x$$

El número real y se denomina parte imaginaria del complejo z y se denota por:

$$\text{Im}(z) = y$$

Si $y = 0 \Rightarrow z = x$ se denomina número complejo real.

Si $x = 0 \Rightarrow z = iy$ se denomina número complejo imaginario puro.

Consideraciones:

Dado: $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Se denomina el **complejo conjugado de z** al número:

$$\bar{z} = x - iy$$

Se denomina el **complejo opuesto de z** al número:

$$-z = z^* = -x - iy$$

• Dado: $z = x + iy; \omega = a + bi, \in \mathbb{C} \Rightarrow z = \omega \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$

• El número **i** se denomina **unidad imaginaria**: $i = \sqrt{-1}$, tal que:

$$i^2 = -1; \quad i^{4k+n} = i^n; \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}$$

PROBLEMA 01:

Siendo $z = \frac{a + 3i}{2 - 5i}$ un complejo real, calcule el valor de a

- A) $-6/5$ B) $-3/5$ C) $-2/5$ D) $-1/5$ E) $2/5$

CLAVE: A

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

La forma binómica o cartesiana de un número complejo se establece como:

$$z = (x; y) = x + iy$$

Ejemplos:

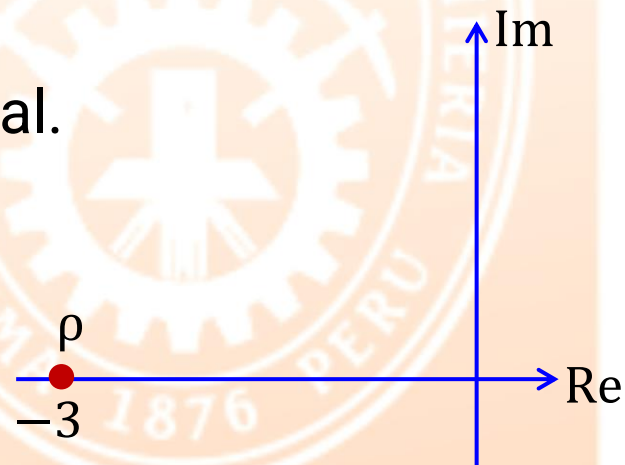
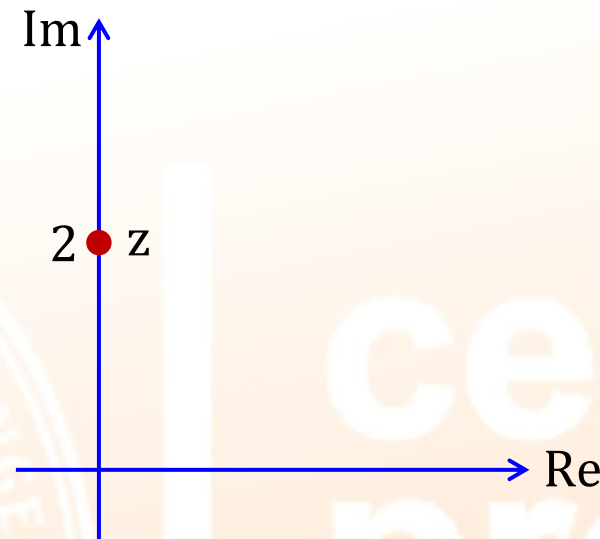
* $\omega = (3; -4) \Rightarrow \omega = 3 - 4i$

* $z = (0; 2) \Rightarrow z = 0 + 2i$

$\Rightarrow z = 2i$, z es un número complejo imaginario puro.

* $\rho = (-3; 0) \Rightarrow \rho = -3 + 0i$

$\Rightarrow \rho = -3$, ρ es un número complejo real.



OPERACIONES CON COMPLEJOS

Dados los números complejos: $z = a + bi$; $\omega = c + di$

Adición:

$$z + \omega = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplicación:

$$z \times \omega = z\omega = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Sustracción:

$$z - \omega = (a - c) + (b - d)i$$

División: $\omega \neq 0$

$$\frac{z}{\omega} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

Consecuencia:

Siendo: $z_1 = \frac{a + bi}{c + di}$

Si z_1 es un número complejo real, $b \cdot c = a \cdot d$

Si z_1 es un número complejo imaginario puro, $ac + bd = 0$

MÓDULO DE UN COMPLEJO

Dado el número complejo $z = a + bi$, el módulo de z se denota como $|z|$ y se define por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} * z = 3 + 4i &\Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &\Rightarrow |z| = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * z &= [\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)] + i[\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)] \\ &\Rightarrow |z| = \sqrt{[\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)]^2 + [\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)]^2} \\ &\Rightarrow |z| = \sqrt{2[\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)]} \\ &\Rightarrow |z| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

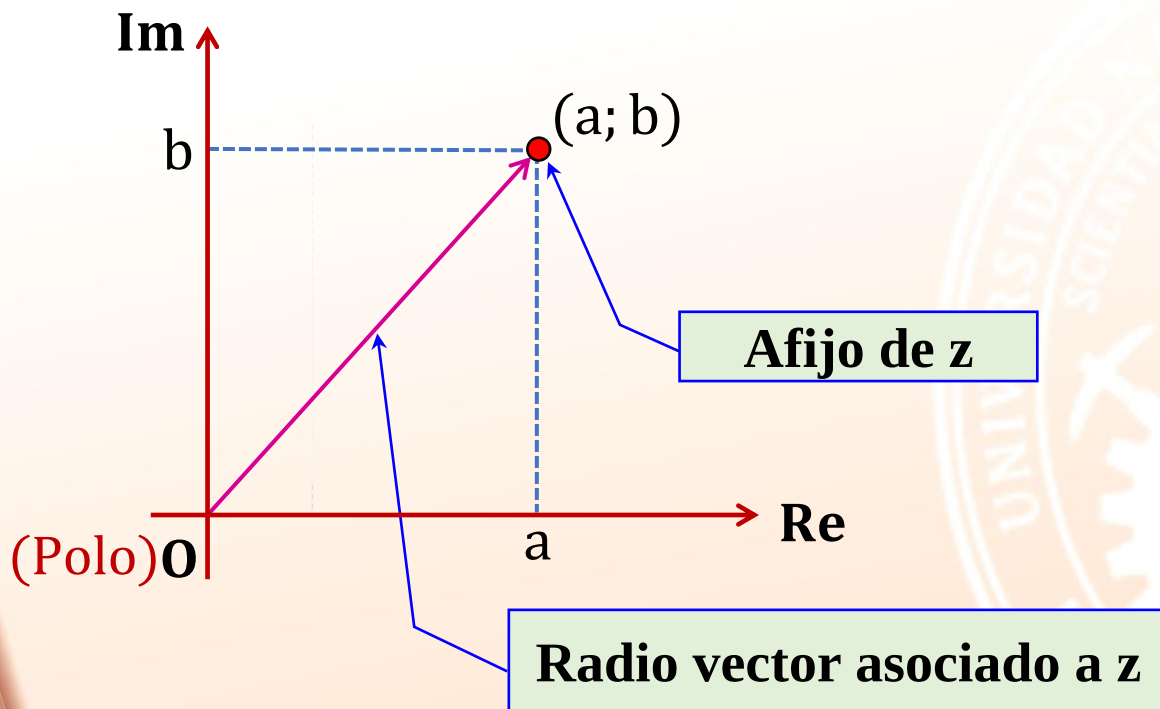
Propiedades:

- * $|z| \geq 0; \forall z \in \mathbb{C}$
- * Si $|z| = 0 \Rightarrow z = 0 + 0i$
- * $|z| = |\bar{z}| = |-z|$
- * $|z\omega| = |z||\omega|; \forall z, \omega \in \mathbb{C}$
- * $\left| \frac{z}{\omega} \right| = \frac{|z|}{|\omega|}; \forall z, \omega \in \mathbb{C}; \omega \neq 0$
- * $|z|^2 = z \times \bar{z}; \forall z \in \mathbb{C}$
- * $|z + \omega| \leq |z| + |\omega|$

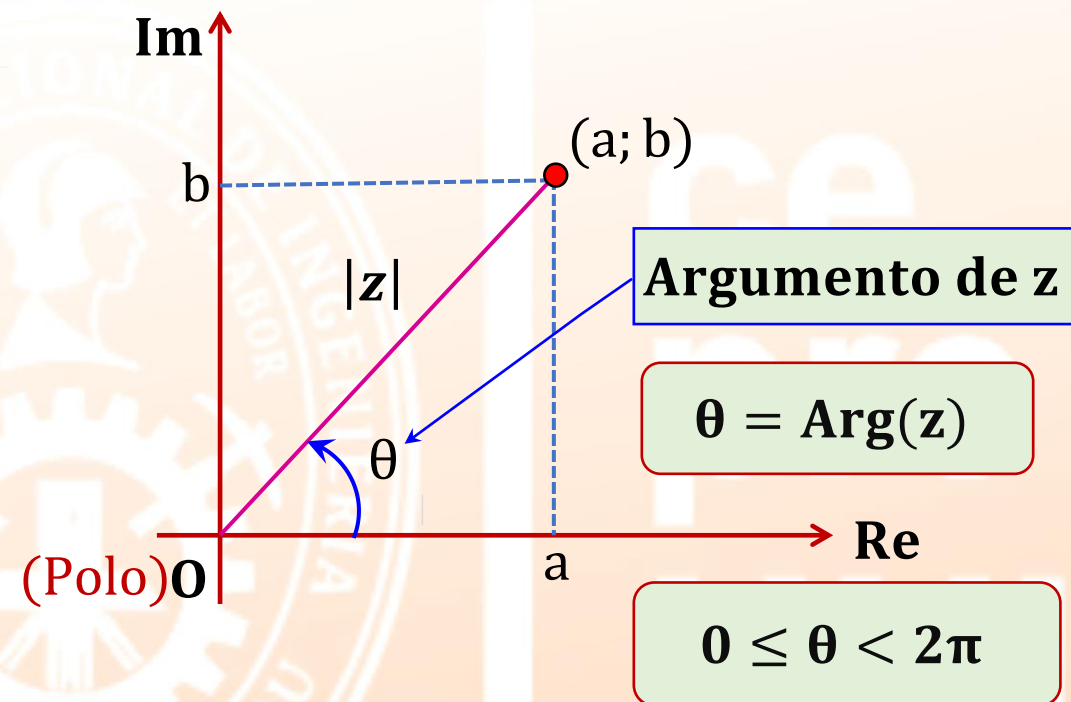
REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

La representación geométrica de un número de complejo se realiza en un plano denominado Plano Complejo o Plano de Gauss:

Dado: $z = a + bi$ $\begin{cases} \text{Re}(z) = a \\ \text{Im}(z) = b \end{cases}$

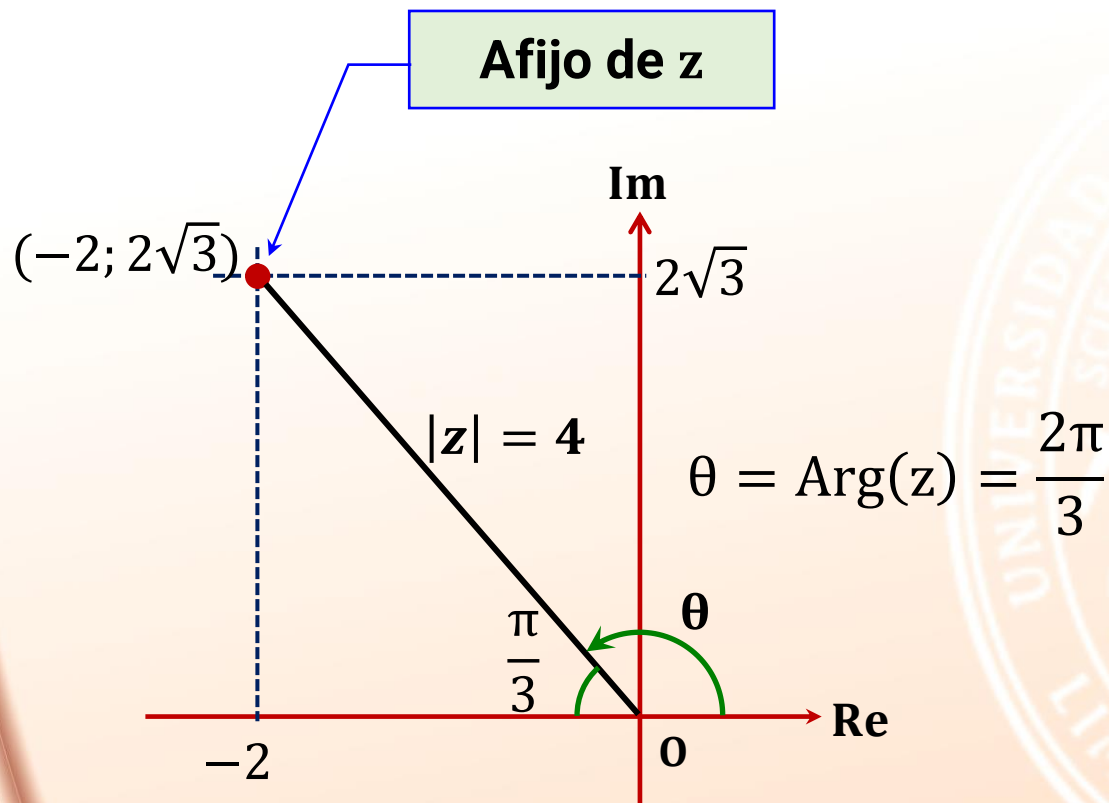


Además si: $z = a + bi$



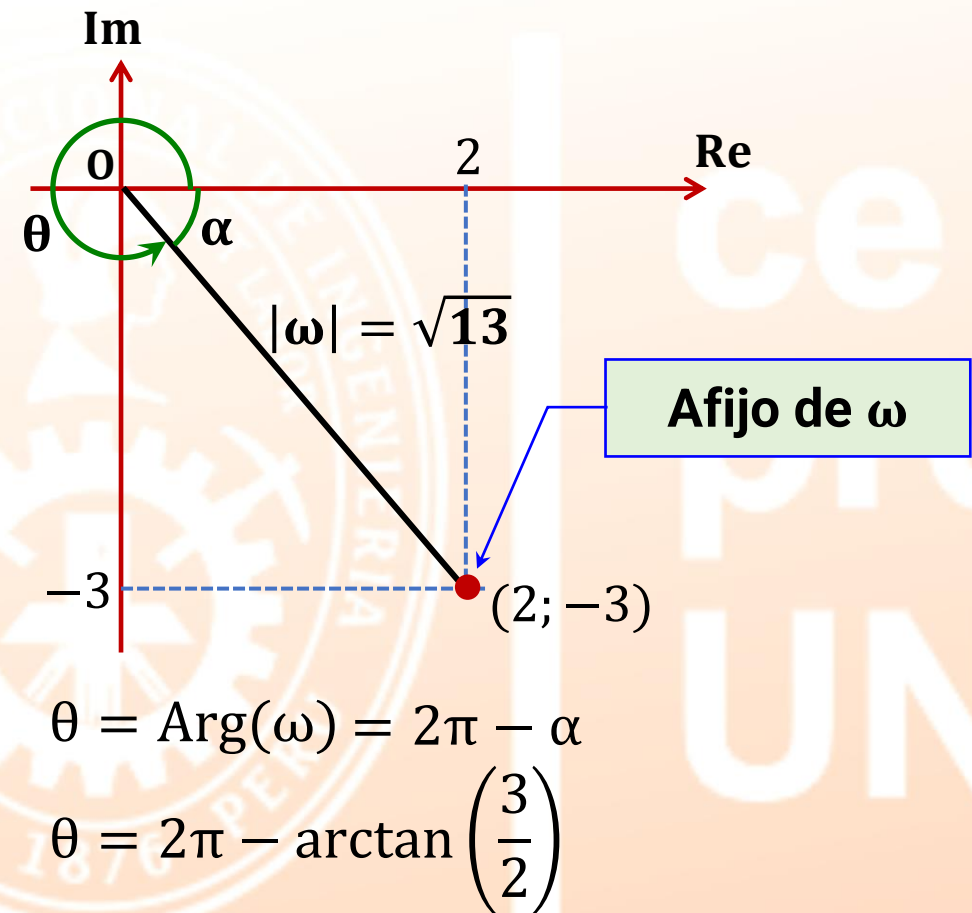
Ejemplo: $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ $\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = -2 \\ \operatorname{Im}(z) = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$



Ejemplo: $\omega = 2 - 3i$ $\begin{cases} \operatorname{Re}(\omega) = 2 \\ \operatorname{Im}(\omega) = -3 \end{cases}$

$$|\omega| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$



PROBLEMA 02

Calcule el valor de

$$F = \cos \left(\text{Arg} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) \right)$$

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
D) $-\sqrt{3}/2$ E) $\{-1; 0; 1\}$

CLAVE: C**PROBLEMA 03**

Calcule el área (en u^2) de la región plana que limita el conjunto de números complejos z , con los ejes real e imaginario, si: $|z + 2i| = |z - 3|$

- A) $\frac{25}{12}$ B) $\frac{25}{48}$ C) $\frac{36}{16}$ D) $\frac{35}{12}$ E) $\frac{25}{16}$

CLAVE: B

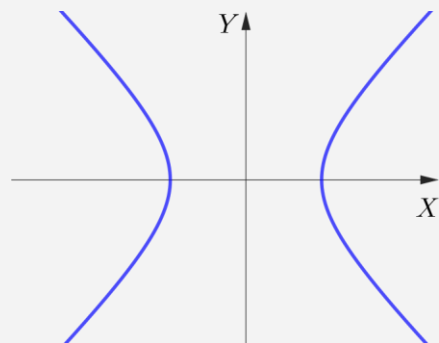
PROBLEMA 04

Indique la gráfica que resulta de $z^2 - \bar{z}^2 = i$, siendo $z \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$

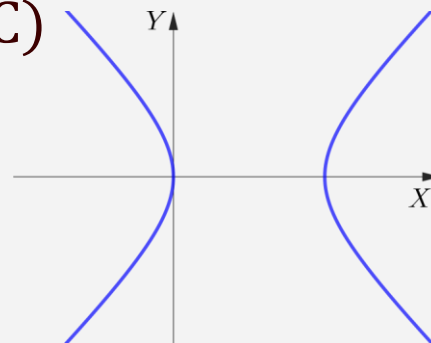
A)



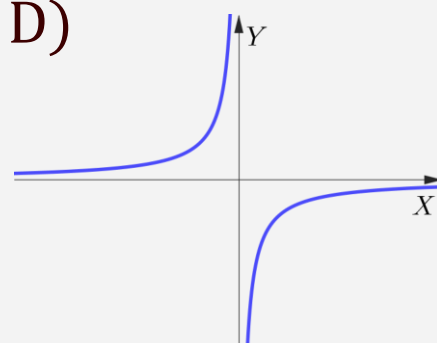
B)



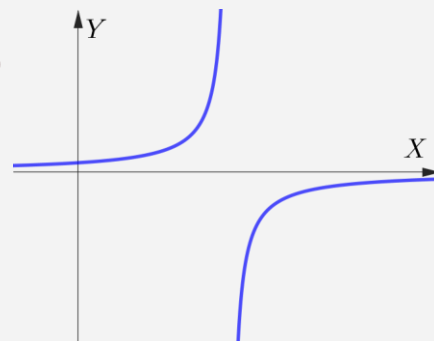
C)



D)



E)



CLAVE: A

PROBLEMA 05

Si A , B , C , D , E y F son números complejos que determinan un hexágono regular con centro en el origen y lado de longitud 2, calcule el valor de

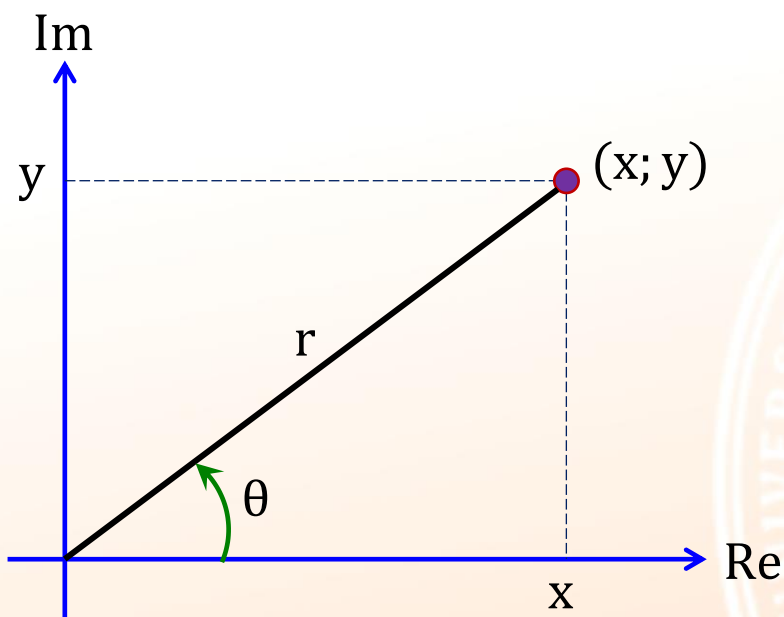
$$R = \frac{A \cdot \bar{A} - B \cdot \bar{B} + C \cdot \bar{C}}{D \cdot \bar{D} + E \cdot \bar{E} - F \cdot \bar{F}}$$

A) -1 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3 **CLAVE: C**

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dado el número complejo en su forma binómica: $z = x + iy$; $|z| = r$

Lo representamos en el plano de Gauss:



Se observa que: $x = r \cos(\theta)$
 $y = r \sin(\theta)$

Luego, reemplazamos en z :

$$z = x + iy$$

$$\Rightarrow z = r \cos(\theta) + i \cdot r \sin(\theta)$$

$$z = r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

$$z = r \cdot \text{cis}(\theta)$$

Multiplicación de números complejos en forma trigonométrica:

Dados los números complejos z_1 y z_2 de módulos r_1 y r_2 respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= r_1 [\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)] \\ z_2 &= r_2 [\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)] \end{aligned} \right\} \quad z_1 \times z_2 = (r_1)(r_2) [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$z_1 \times z_2 = (r_1)(r_2) \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Ejemplo:

$$\text{Si: } z = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7} \right) \right) \text{ y } \omega = 3 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{21} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{21} \right) \right)$$

$$\Rightarrow z\omega = 12 \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{21} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7} + \frac{4\pi}{21} \right) \right) = 12 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$\therefore z\omega = 12 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

División de números complejos en forma trigonométrica:

Dados los números complejos z_1 y z_2 de módulos r_1 y r_2 respectivamente: ($r_2 \neq 0$)

$$z_1 = r_1 [\cos(\theta_1) + i \operatorname{sen}(\theta_1)]$$

$$z_2 = r_2 [\cos(\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

Ejemplo: Expresé en forma binómica: $z = \frac{(4 \operatorname{cis}(40^\circ))(6 \operatorname{cis}(70^\circ))}{(3 \operatorname{cis}(65^\circ))}$

$$\text{Operamos: } z = \frac{24 \operatorname{cis}(40^\circ + 70^\circ)}{3 \operatorname{cis}(65^\circ)} = \frac{24 \operatorname{cis}(110^\circ)}{3 \operatorname{cis}(65^\circ)} = \left(\frac{24}{3} \right) \operatorname{cis}(110^\circ - 65^\circ)$$

$$\Rightarrow z = 8 \operatorname{cis}(45^\circ) = 8 [\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ)] \quad \therefore \mathbf{z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}$$

PROBLEMA 06:

Determine el número complejo z en su forma polar si

$$|\bar{z}i| = 4, \quad \text{Arg}(z(1+i)) = \pi/2$$

- A) $4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$ C) $\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)$ E) $-2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$
B) $2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$ D) $-\left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$

CLAVE: A

Teorema de De Moivre:

Dado el número complejo $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, entonces:

$$z^n = |z|^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]; \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = |z|^n \text{cis}(n\theta); \forall n \in \mathbb{Z}$$

Demostración

Lo demostramos por inducción:

i) La igualdad es válida para $n = 1$, puesto que:

$$z^1 = |z|^1 [\cos(1 \cdot \theta) + i\sin(1 \cdot \theta)] = |z| [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

ii) Supongamos que la fórmula es válida para $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$z^k = |z|^k [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]$$

iii) Debemos demostrar que la fórmula es válida para $n = k + 1$:

$$z^{k+1} = |z|^{k+1} [\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)] \quad (1)$$

Partimos de: $z^k = |z|^k [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]$

$$\Rightarrow z^k \cdot z = |z|^k [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \cdot z$$

$$\Rightarrow z^k \cdot z = |z|^k [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \cdot z$$

$$\Rightarrow z^{k+1} = |z|^k [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \cdot |z| [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

$$\Rightarrow z^{k+1} = |z|^k \cdot |z| [\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)] \cdot [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$$

$$\Rightarrow z^{k+1} = |z|^{k+1} [\cos(k\theta)\cos(\theta) + i\cos(k\theta)\sin(\theta) + i\sin(k\theta)\cos(\theta) + i^2\sin(k\theta)\sin(\theta)]$$

$$\Rightarrow z^{k+1} = |z|^{k+1} [\cos(k\theta)\cos(\theta) - \sin(k\theta)\sin(\theta) + i(\cos(k\theta)\sin(\theta) + \sin(k\theta)\cos(\theta))]$$

$$\Rightarrow z^{k+1} = |z|^{k+1} [\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)]$$

Queda confirmada la validez de (1).

De esta manera se ha demostrado que la fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para extender la demostración de la fórmula $\forall n \in \mathbb{Z}$, hacemos $n = -k, k \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$\Rightarrow z^n = z^{-k} = \frac{1}{|z|^k} = \frac{1}{|z|^k} \frac{[\cos(k\theta) - i\sin(k\theta)]}{[\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)]} \cdot \frac{[\cos(k\theta) - i\sin(k\theta)]}{[\cos(k\theta) - i\sin(k\theta)]} \leftarrow 1$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^{-k} \cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta) = |z|^n \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

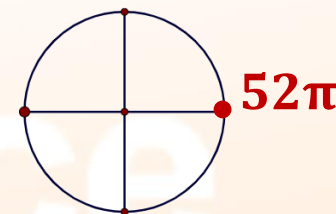
Por lo tanto, la fórmula es válida $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Tenga en cuenta:

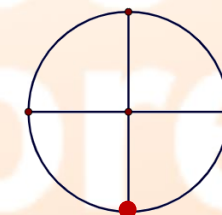
$$[|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))]^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{156} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{156} = \cos(52\pi) + i\sin(52\pi) = 1$$



$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{142} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{142} = \cos\left(\frac{71\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{71\pi}{2}\right) = -i$$



$$(1 - i)^{124} = \left(\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{124} = \sqrt{2}^{124} \text{cis}\left(\frac{124 \cdot 7\pi}{4}\right) = 2^{62} \text{cis}(217\pi)$$

$$(1 - i)^{124} = 2^{62} \cos(217\pi) = -2^{62}$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Exponencial compleja:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

(Fórmula de Euler)

e : base de logaritmos neperianos

$\theta \in \mathbb{R}$

$i = \sqrt{-1}$: unidad imaginaria

Demostración

Se conoce las series de Maclaurin para $\sin(x)$, $\cos(x)$ y e^x :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

En esta última, sustituimos x por ix :

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + ix - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Por lo tanto:

Si un número complejo z en su forma trigonométrica es:

$$z = |z|(\underbrace{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}_{e^{i\theta}})$$

la forma exponencial de dicho número z es:

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |z|: \text{módulo de } z \\ \theta = \text{Arg}(z) \end{array} \right.$$

Ejemplos:

a) $z = 1 + i$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

b) $\omega = 1 - i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \omega = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$$

c) $z = -3\sqrt{3} + 3i$

$$\Rightarrow z = 6e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Consecuencia

- * **S:** Dados los números complejos en su forma exponencial: $z = |z|e^{i(\theta)}$; $\omega = |\omega|e^{i(\beta)}$

$$z \times \omega = z\omega = |z||\omega| e^{i(\theta+\beta)}$$

$$\frac{z}{\omega} = \frac{|z|}{|\omega|} e^{i(\theta-\beta)}; |\omega| \neq 0$$

- * Para un complejo $z = e^{i(\theta)}$:

$$|z| = |e^{i(\theta)}| = 1$$

- * Tener en cuenta los siguiente casos particulares:

$$i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$$

$$-i = e^{i(\frac{3\pi}{2})}$$

$$-1 = e^{i(\pi)}$$

$$1 = e^{i(0)}$$

- * De la fórmula de Euler: $e^{i(\theta)} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta) \Rightarrow$

$$e^{-i(\theta)} = \cos(\theta) - i\text{sen}(\theta)$$

OBSERVACIÓN

* A partir de las siguientes relaciones: $e^{i(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \dots (1)$

$$e^{-i(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \dots (2)$$

(1) + (2):

$$e^{i(\theta)} + e^{-i(\theta)} = 2\cos(\theta)$$

(1) - (2):

$$e^{i(\theta)} - e^{-i(\theta)} = 2i\sin(\theta)$$

Ejemplo, simplifiquemos:

$$1) z = \frac{e^{i(4\theta)} - e^{-i(4\theta)}}{e^{i(2\theta)} + e^{-i(2\theta)}}$$

$$2) \omega = \frac{e^{i(3\theta)} + e^{-i(3\theta)}}{e^{i(\theta)} + e^{-i(\theta)}}$$

$$1) z = \frac{2i\sin(4\theta)}{2\cos(2\theta)} = \frac{i\sin(4\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{i \times 2\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{\cos(2\theta)} \Rightarrow z = 2i\sin(2\theta)$$

$$2) \omega = \frac{2\cos(3\theta)}{2\cos(\theta)} = \frac{\cos(3\theta)}{\cos(\theta)} \Rightarrow \omega = 2\cos(2\theta) - 1$$

PROBLEMA 07**(PC 6 CEPRE UNI 2018-1)**

Dado el número complejo $Z = e^{i(2\theta)} + e^{i(4\theta)} + e^{i(6\theta)} + e^{i(8\theta)}$, calcule: $\frac{1}{\text{Im}(Z)}$

A) $\cot(\theta) - \cot(2\theta)$

B) $\cot(2\theta) - \cot(3\theta)$

C) $\cot(3\theta) - \cot(4\theta)$

D) $\cot(4\theta) - \cot(5\theta)$

E) $\cot(5\theta) - \cot(6\theta)$

CLAVE: D**PROBLEMA 08****(PC 6 CEPRE UNI 2017-1)**

Si: $\frac{[1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = 2A + B\cos(\theta)$. Calcule: $B - A$.

A) -1

B) 0

C) 1

D) 2

E) 3

CLAVE: C

PROBLEMA 09 (PC 6 CEPRE UNI 2016-1)

Calcule la parte real del número complejo: $Z = \frac{e^{i\theta} + e^{i3\theta} + e^{i5\theta}}{e^{i2\theta} + e^{i6\theta} + e^{i10\theta}}$

- A) $\sin(\theta)$ B) $\cos(\theta)$ C) $\sin(2\theta)$ D) $\cos(2\theta)$ E) $\cos(3\theta)$

CLAVE: B**PROBLEMA 10**

En el plano complejo, calcule el área de la región R (en u^2), definida por

$$R = \left\{ z/z \in \mathbb{C}; |z| \in [1; 3] \text{ y } \text{Arg}(z^4) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

- A) π B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

CLAVE: C

PROBLEMA 11

Si $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, $\pi < \theta < 2\pi$. Determine el valor de $\left| \frac{1 - \bar{z}}{1 + \bar{z}} \right|$

- A) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ D) $-\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

CLAVE: B**PROBLEMA 12**

Calcule $A = \tan(\theta) + \cot(\theta)$, si $\text{Arg}(z) = \theta$ y $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{-2} = 1$

- A) 16 B) 12 C) 8 D) 4 E) 2

CLAVE: D

PROBLEMA 13

Calcule la medida del ángulo θ , si $\arg(z) = \pi/4$, además

$$z = \frac{\operatorname{sen}(4\theta) - i\cos(4\theta)}{\operatorname{sen}(4\theta) + i\cos(4\theta)}$$

A) $-\frac{5\pi}{32}$

B) $-\frac{3\pi}{32}$

C) $-\frac{\pi}{32}$

D) $\frac{\pi}{32}$

E) $\frac{3\pi}{32}$

CLAVE: B**PROBLEMA 14**

Determine la parte imaginaria del complejo $z = \frac{-1}{1 + \cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)}$

A) $\frac{1}{2}\cos(x)$

B) $\frac{1}{2}\sec(x)$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}\tan(x)$

E) $\frac{1}{2}\tan(2x)$

CLAVE: D

OBSERVACIÓN

* De la relación de Euler: $e^{i(\theta)} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

$$1 + e^{i(\theta)} = 1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta) \Rightarrow 1 + e^{i(\theta)} = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \times 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$1 + e^{i(\theta)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}_{e^{i(\theta/2)}}$$

$$1 + e^{i(\theta)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

* De forma análoga:

$$1 - e^{i(\theta)} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ejemplos:

$$1 + e^{i(4\theta)} = 2\cos(2\theta)e^{i(2\theta)}$$

$$1 + e^{i(6\theta)} = 2\cos(3\theta)e^{i(3\theta)}$$

$$1 - e^{i(4\theta)} = -2i\sin(2\theta)e^{i(2\theta)}$$

$$1 - e^{i(6\theta)} = -2i\sin(3\theta)e^{i(3\theta)}$$

OBSERVACIÓN

* Dado que:

$$e^{i(\theta)} + e^{-i(\theta)} = 2\cos(\theta), \text{ entonces:}$$

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i(\theta)} + e^{-i(\theta)}}{2}$$

$$e^{i(\theta)} - e^{-i(\theta)} = 2i\sin(\theta), \text{ entonces:}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i(\theta)} - e^{-i(\theta)}}{2i}$$

* En las dos últimas relaciones; si en lugar de θ colocamos a un complejo z , se tiene:

$$\sin(z) = \frac{e^{i(z)} - e^{-i(z)}}{2i}$$

$$\cos(z) = \frac{e^{i(z)} + e^{-i(z)}}{2}$$

Ejemplo, calcule: $\cos(i)$

$$\cos(i) = \frac{e^{i(i)} + e^{-i(i)}}{2} = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \therefore \cos(i) = \frac{1 + e^2}{2e}$$

PROBLEMA 15

Considere el número $z = \frac{1}{e^{ix}-1} \in \mathbb{C}$. Calcule el valor de $4 \cdot \text{Im}^2(z) + 1$.

- A) $\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)$ B) $\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$ C) $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ D) $\cot^2\left(\frac{x}{2}\right)$ E) 1

CLAVE: A**PROBLEMA 16**

Calcule: $6i \cos(i \ln(3))$

- A) $5i$ B) 5 C) 10 D) $10i$ E) 15

CLAVE: D

RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO

Dados el número complejo $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, existen n números complejos $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ (denominadas raíces n – ésimas de z), tales que:

$$z_k^n = z, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$$

Además, estas raíces están dadas por la fórmula:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i\sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

Ejemplo: Determine las raíces cúbicas de $z = i$.

Sabemos que $z = i = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i\sin \left(\frac{\pi}{2} \right)$

$$\Rightarrow z_k = \cos \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) + i\sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \text{ (donde } k = 0, 1, 2)$$

Luego, las raíces cúbicas de $z = i$ son:

$$z_0 = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \quad z_1 = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i\sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) \quad z_2 = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i\sin \left(\frac{3\pi}{2} \right)$$